

## **Paolo Bonavoglia**

### ***In principio era Zenone di Elea***

**Abstract:** In questo breve intervento presento un possibile percorso per introdurre i numeri iperreali e l'analisi non standard, partendo dai paradossi di Zenone; un approccio adatto ai licei, sperimentato al liceo classico, dove gli studenti studiano anche filosofia e conoscono, bene o male, i paradossi di Zenone.

1. Il primo paradosso di Zenone (dicotomia) può rappresentarsi con tre numeri iperreali: strada percorsa, strada ancora da percorrere, strada complessiva (costante); si tratta di numeri che possono essere sommati, sottratti, confrontati:
2. Il terzo paradosso di Zenone (freccia) porta al problema della velocità istantanea; l'uso di un numero infinitesimo al posto dello zero porta Leibniz e Newton a risolvere il problema in modo equivalente.
3. I numeri infinitesimi del punto 3 hanno le stesse proprietà di quelli del n.1; maggiori di zero e minori di ogni numero reale (o razionale); quindi si equivalgono

## **Vieri Benci**

### ***Gli infinitesimi in natura***

**Abstract:** Molto spesso, specialmente tra i cultori dell'analisi non-standard, l'uso dei numeri infiniti ed infinitesimi viene considerato uno strumento per facilitare la comprensione di alcuni concetti del calcolo infinitesimale e per semplificare la dimostrazione dei relativi teoremi.

Secondo me questo punto di vista è troppo restrittivo: infatti penso che il concetto di infinitesimo sia di primaria importanza in se stesso e che non abbia bisogno di essere giustificato dalle sue applicazioni "pratiche". Nessuno può contestare questa affermazione da punto di vista filosofico: l'infinito e l'infinitesimo sono sempre stati oggetti di speculazioni metafisiche. Ma io voglio dire molto di più: voglio affermare che i concetti di numero infinito ed infinitesimo dovrebbero essere parte integrante della descrizione matematica della natura. Questa cosa era parzialmente vera nel passato, ma oggi non è più così.

Sosterrò questa mia idea poco ortodossa (ed un po' provocatoria) mediante tre esempi dimostrando che certi fenomeni naturali possono essere modellizzati meglio in ambito non archimedeo

- 1°esempio: la geometria Euclidea intesa come modello dello spazio fisico.
- 2°esempio: calcolo delle probabilità.
- 3°esempio: un semplice problema di elettrostatica.

## **Richard O'Donovan**

### ***Nonstandard Analysis in the Classroom ultrasmall numbers vs limits: a comparison***

**Abstract:** The intuition of infinitesimals can be oriented to lead to mathematical concepts. Pre-university students can thus acquire the fundamental ideas which form the core of analysis through a nonstandard approach. At this level, compared to epsilon-delta analysis, the non standard analysis approach allows for greater simplicity.

A rigorous theory of infinitesimals, known as nonstandard analysis, was developed by Robinson in the 1960s. Nelson and Hrbacek then separately provided axiomatic approaches. The theory used here is based on research by Péraire and Hrbacek and developed jointly with Lessmann and O'Donovan, since the turn of the milenium, in

order to be usable even at introductory level. Last year, we had the honour of making a presentation of this approach in Lucca. The presentation was centred on explaining how this approach is used.

This year, after a brief summary of the principles involved, we will elaborate on some testimonies: one by an

expert who was jury on exams for classes working in the traditional way and classes working with ultrasmall numbers (this expert is also a university professor of mathematics and physics pedagogy). Testimonies by former students who have had to switch from one approach to the other will also be used.

School material in English and in French can be found on the website [ultrasmall.org](http://ultrasmall.org).

## **Andrea Centomo**

### ***Limiti e continuità: un confronto tra standard e non standard.***

Abstract: Nella prima parte di questo intervento vengono esaminati e confrontati tra loro tre modi di introdurre il concetto di limite che sono stati sperimentati da chi scrive al quinto anno del liceo linguistico.

Il primo modo (standard) consiste nel muovere dal concetto di limite per successioni reali e di sfruttare il teorema ponte per introdurre il concetto di limite per funzioni reali di variabile reale. Il secondo modo (standard) consiste nell'affrontare direttamente la definizione di limite per funzioni reali di variabile reale. Il terzo modo (non standard) prevede l'uso di numeri iperreali infinitesimi e infiniti.

Nella seconda parte viene discusso invece il concetto di continuità e il suo rapporto con quello di limite.

## **Sergio Casiraghi**

### ***Formula per il calcolo delle derivate di ordine superiore***

Abstract: In ambito didattico certe dimostrazioni matematiche vengono a volte omesse o date per scontate. Sviluppare dimostrazioni può essere uno dei compiti più difficili da assegnare agli studenti. Solo gli universitari di matematica, di informatica e dei campi correlati solitamente ne sono investiti. Una Neo Smart Analysis (<http://nsa.one>), tale ritengo l'approccio in Analisi Non Standard, può contribuire a ridurre notevolmente le difficoltà e far comprendere come la Matematica ricorra a procedimenti deduttivi che partono dalle ipotesi per derivare la tesi. Procedendo per induzione, senza dover ricavare in cascata tutte le derivate, dimostro la formula generale per il calcolo della derivata n-esima di una funzione  $f(x)$  in NSA, sotto sufficienti condizioni di esistenza e regolarità delle sue derivate. L'interesse per questa formula non è legato solo a calcoli numerici automatici di derivate di ordine superiore o a espressioni iperreali ricavate dal calcolo frazionario della derivata di Grünwald-Letnikov detta anche "differintegrale", ma essa estende la definizione di derivata prima rimandando addirittura al Calcolo Umbrale. Seguono alcune considerazioni e semplici applicazioni della formula quali il calcolo della derivata ventesima di  $(3x-x^2)/(x+e^x)$ , della derivata n-esima di  $1/(x+b)$  e altre, fino alla più nota funzione Smart presente nel logo della VII Giornata di Studio. Inoltre, si rilascia la versione tradotta in italiano-matematiche del testo pubblicato in memoria di Jacob (Jaap) Ponstein: "NON STANDARD ANALYSIS".

## **Lucia Rapella**

### ***Videolezioni di Analisi non standard***

Abstract: Tra le novità della didattica, in questi anni spicca la flipped classroom. Ecco un percorso di videolezioni ( <https://www.youtube.com/playlist?list=PL81lc9ozzyoosyZqHZG-2PDiPcfsiiZ96> e seguenti playlist ) utilizzato per un percorso di quarto e quinto anno in un istituto tecnico. Attraverso qualche esempio si vogliono esporre pregi e difetti della classe rovesciata, quando l'argomento è l'analisi non standard.

## **Roberto Zanasi**

### ***Aspetti geometrici di alcuni teoremi del calcolo integrale***

Abstract: Utilizzando l'analisi non standard è possibile visualizzare in maniera molto efficace alcuni teoremi relativi al calcolo integrale, come ad esempio il teorema fondamentale, la formula per il volume di un solido di rotazione o la formula per il calcolo della lunghezza di un arco di curva.

**Daniele Zambelli**  
***Un percorso di Analisi Non Standard***

Abstract: Il testo libero, Matematica Dolce, integra un corso di analisi non standard.

Il percorso inizia nella classe terza con l'introduzione degli Iperreali, con il calcolo di espressioni e con l'estensione delle funzioni goniometriche in questo nuovo insieme numerico.

Nel quarto volume anche le funzioni esponenziali e logaritmiche vengono applicate anche a valori infinitesimi e infiniti.

Il quinto anno l'analisi viene trattata senza bisogno di introdurre i limiti, questi ultimi sono presentati come risultato di una particolare funzione negli iperreali.

In questo intervento presento in dettaglio le principali scelte e motivazioni di una proposta di analisi non standard nell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie di secondo grado.

**Bruno Stecca – Leonardo Aldegheri**  
***L'analisi non standard nell'opera di Maria Gaetana Agnesi***

Abstract: In questo breve intervento ci si propone di presentare il testo "Istituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana" di Maria Gaetana Agnesi, del 1748, cercandovi legami con l'analisi non standard. Il lavoro, dopo una breve presentazione storica del testo, vuole esaminare la semplice illustrazione che nel testo viene fatta degli infinitesimi e descrivere il modus operandi impiegato dalla Agnesi, basato sulla geometria e la proporzione. Si mostrerà, poi, l'uso fatto dalla matematica italiana della sottotangente e si proporranno semplici e brevi esempi, tratti dall'opera, di quanto in precedenza accennato.

**Ruggero Ferro**  
***Numeri reali, iperreali, infinitesimi e infiniti da INVENTARE o da COSTRUIRE?***

Abstract: Diverse presentazioni del mondo non standard seguono diversi approcci che dividerei essenzialmente tra inventare o costruire gli enti introdotti.

Direi che s'inventa di fronte a una esigenza pensando a qualcosa che la soddisfi e le cui caratteristiche potranno sempre meglio essere precisate man mano che si procede. Gli enti inventati ci sono proprio in quanto inventati, e possono rimanere fino al momento in cui non portino a contraddizione e che non si dimostrino inefficienti e inutili.

Alcune presentazioni di infinitesimi, iperreali e nozioni non standard cominciano con il costruire i numeri iperreali dai reali. Poi fanno vedere le loro caratteristiche e, infine, che essi sono opportuni. Eventualmente paragonano le costruzioni presentate con la costruzione dei reali. Queste costruzioni risolvono automaticamente il problema della consistenza relativa al mondo in cui vengono effettuate. Esse, però, non sono effettive. Inoltre fanno sorgere la domanda di come sono state individuate per rispondere alle esigenze (quali, se non sono dette prima?). Si deve ritenere che s'approccio costruttivo sia più rigoroso?

Ritengo che i due tipi di presentazione abbiano un impatto didattico notevolmente diverso e da valutare attentamente.

Nella breve presentazione che mi propongo di fare, esaminerei attentamente i termini della questione, cercando anche di individuarne pro e contro didattici.